

Analysis III

ÜBUNGSBLATT 5

- (i) Sei $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathcal{E})$ das von einer Familie $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ erzeugte Dynkin-System. Dann ist das Dynkin-System $\mathcal{D}$ genau dann eine σ -Algebra, wenn es das System endlicher Durchschnitte von Mengen aus $\mathcal{E}$ enthält.
(ii) Geben Sie ein Beispiel einer nicht $\cap$ -stabilen Familie $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$, für die $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ eine σ -Algebra ist.
(iii) Ist $\mathcal{A}$ eine σ -Algebra auf X und sind μ, ν Maße auf $\mathcal{A}$ mit gleicher endlicher Gesamtmasse, $\mu(X) = \nu(X) < \infty$, so ist die Teilmengenfamilie

$$\text{von } \mathcal{A} \quad \{M \in \mathcal{A} \mid \mu(M) = \nu(M)\}$$

ein Dynkin-System. Folgern Sie, dass die Maße μ und ν gleich sind, sobald sie auf einem $\cap$ -stabilen Erzeugersystem übereinstimmen.

- (iv) Sind $\mathcal{A}_i$ Dynkin-Systeme auf Mengen X_i ($i = 1, \dots, n$), so ist die Familie von Zylindermengen $\mathcal{Z}(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n)$ ein Dynkin-System auf $X_1 \times \dots \times X_n$. Für $n \geq 2$ ist es i.a. nicht $\cap$ -stabil.
(v) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum (dh $(X, \mathcal{A})$ ein Messraum und μ ein Maß mit Gesamtmasse $\mu(X) = 1$) und $A \in \mathcal{A}$ ein Ereignis (dh eine messbare Teilmenge). Dann ist die Teilmengenfamilie

$$\{B \in \mathcal{A} \mid \mu(A \cap B) = \mu(A)\mu(B)\}$$

(der von A *stochastisch unabhängigen* Ereignisse) ein Dynkin-System auf X .

2. Ist $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung von Mengen und ist $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ eine σ -Algebra, so auch die Familie

$$\{M \subset Y \mid f^{-1}(M) \in \mathcal{A}\} \subset \mathcal{P}(Y).$$

Sie ist die *größte* σ -Algebra auf Y , bezüglich derer die Abbildung f bei gegebener σ -Algebra $\mathcal{A}$ auf X messbar ist. (Diese Konstruktion ist analog zur Konstruktion der *Quotiententopologie*.)

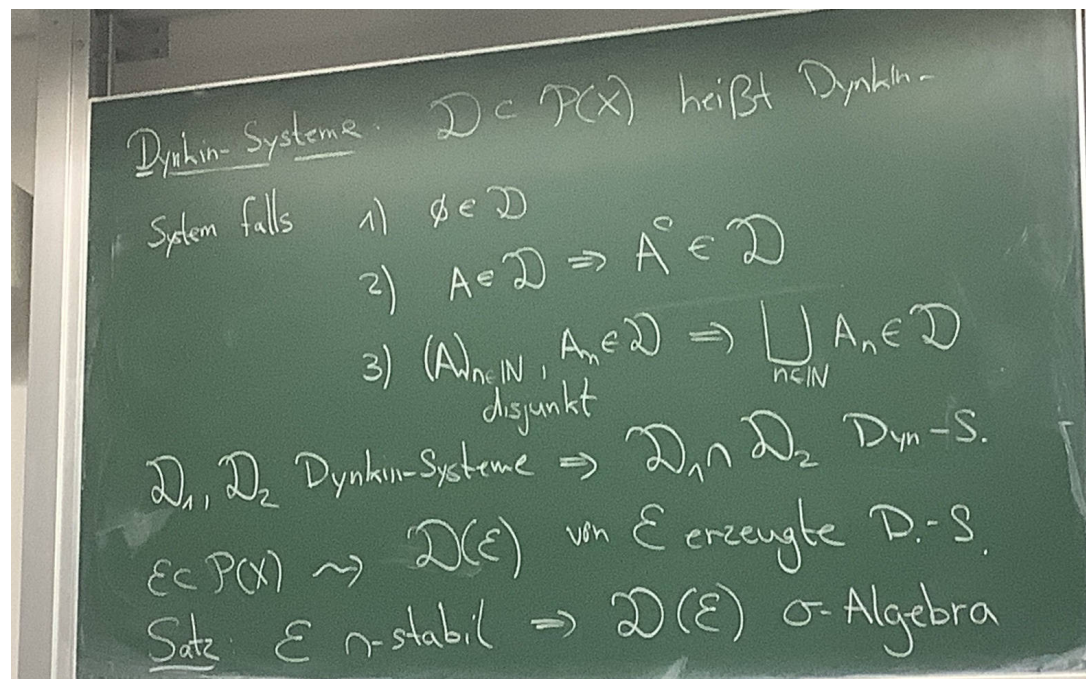
3. Die *Produkt- σ -Algebra* hat die folgende *universelle Eigenschaft*: Seien $(X_i, \mathcal{A}_i)$ für $i = 1, \dots, n$ und $(Y, \mathcal{B})$ Messräume. Dann ist eine Abbildung

$$f : (Y, \mathcal{B}) \rightarrow (X_1 \times \dots \times X_n, \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n)$$

genau dann messbar, wenn die Komponentenabbildungen

$$f_i = \pi_i \circ f : (Y, \mathcal{B}) \rightarrow (X_i, \mathcal{A}_i)$$

messbar sind.



Aufgabe 1:

Sei $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$, $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathcal{E})$.

(i) Beh: $\mathcal{D}$ ist σ -Algebra $\Leftrightarrow \mathcal{F} := \left\{ \begin{array}{l} \text{endliche Durchschnitte} \\ \text{von Mengen } \mathcal{E} \end{array} \right\} \cap \mathcal{D}$

Beweis:

" $\Rightarrow$ ": $\mathcal{E} \subset \mathcal{D}(X)$ u. $\mathcal{D}$ η -stabil $\Rightarrow \mathcal{F} \subset \mathcal{D}$

" $\Leftarrow$ ": Sei $\mathcal{F} \subset \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{F}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}$
 $\uparrow$ $\uparrow$
 η -stabil σ -Algebra
nach Satz

$\mathcal{E} \subset \mathcal{F} \quad \mathcal{D}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{D}(\mathcal{F}) \Rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{E}) = \mathcal{D}(\mathcal{F})$



(ii) Gesucht: $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ nicht $\cap$ -stabil, s.d. $\mathcal{D}(\mathcal{E})$ σ -Algebra

Sei $X = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{E} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}\}$

$$\mathcal{D}(\mathcal{E}) = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{2\}, \{1, 2, 3\}\} = \mathcal{P}(X)$$

$$\underbrace{\mathcal{E} = \mathcal{P}(X) - \{i\}}_{\substack{\text{nicht } \cap\text{-stabil} \\ \text{nicht } \cup\text{-stabil}}} \Rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{E}) = \mathcal{P}(X)$$

($\Rightarrow$ kein Dynkin-System)

(iii) A σ -Algebra auf X , ν, μ Maße mit $\nu(X) = \mu(X) < \infty$.

Beh: $\mathcal{M} = \{A \in \mathcal{A} \mid \nu(A) = \mu(A)\}$ ist ein Dynkin-System.

Beweis: Überprüfe 1) - 3):

$$1) \quad \nu(\emptyset) = 0 = \mu(\emptyset) \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{M}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad A \in \mathcal{M} &\Rightarrow \nu(A^c) = \nu(X) - \nu(A) \\ &= \mu(X) - \mu(A) = \mu(A^c) \\ &\Rightarrow A^c \in \mathcal{M} \end{aligned}$$

$$3) \quad (A_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ p.w. disjunkt, } A_n \in \mathcal{M}$$

$$\Rightarrow \nu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \nu(A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)$$

$$\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$$

Ist $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$ ein $\cap$ -stabiler

Erzeuger von $\mathcal{A}$, d.h. $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}$ mit $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}$

Beh.: $\mathcal{V} = \mu$

Bew.: z.z. $\mathcal{M} = \mathcal{A}$

$$\mathcal{E} \subset \mathcal{M}, \mathcal{M} \text{ Dynkin-System} \Rightarrow \mathcal{E} \subset \mathcal{D}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{M}$$

$\uparrow$
 σ -Algebra

$$\Rightarrow \mathcal{E} \subset \sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A} \subset \mathcal{D}(\mathcal{E}) \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{A}$$

$$\Rightarrow \mathcal{M} = \mathcal{A}$$

(iv) $\mathcal{A}_i$ Dynkin-Systeme auf Menge X_i

Beh.: $\mathcal{Z}(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n)$ ist ein Dynkin-System

Beweis:

- $\emptyset = \pi_1^{-1}(\emptyset) \in \mathcal{Z}$
- $A \in \mathcal{Z} \Rightarrow A = \pi_i^{-1}(A_i)$ für ein $i \in \{1, \dots, n\}$ und $A_i \in \mathcal{A}_i$

$$\Rightarrow A^c = \pi_i^{-1}(A_i^c) \in \mathcal{Z}$$

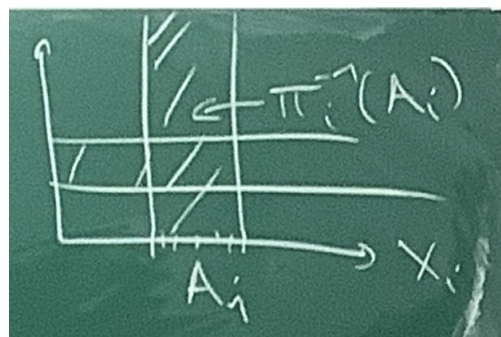
$\cap$
 $\mathcal{A}_i$

• $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $D_n \in \mathcal{Z}$ p.w. disjunkt

$$(*) \Rightarrow \exists i \in \{1, \dots, n\} \text{ s.d. } D_n = \pi_i^{-1}(A_n)$$

und $A_n \in \mathcal{A}_i$ mit A_n p.w. disjunkt

$$\Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \pi_i^{-1}(A_n) = \pi_i^{-1}\left(\underbrace{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n}_{\in \mathcal{A}_i}\right) \in \mathcal{Z}$$



$(*) \emptyset \neq A_i \in \mathcal{A}_i$ u. $A_j \in \mathcal{A}_j$
mit $i \neq j$

$$\Rightarrow \pi_i^{-1}(A_i) \cap \pi_j^{-1}(A_j) \neq \emptyset$$

$$\begin{aligned} \exists a_i \in A_i \text{ i.d. } j &\Rightarrow x_1 \times x_2 \times \dots \times x_{i-1} \times \{a_i\} \times x_{i+1} \times \dots \\ a_j \in A_j &\Rightarrow \quad \times x_{j-1} \times \{a_j\} \times x_{j+1} \times \dots \times x_n \end{aligned}$$

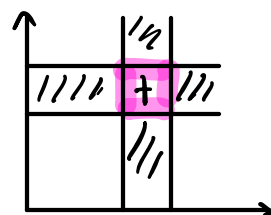


Für $n \geq 2$ ist $\mathcal{Z}$ i. A. nicht $\cap$ -stabil.

falls alle $\mathcal{A}_i$ Algebren

$$X_1 = \{1, 2\} = X_2, \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \mathcal{P}(\{1, 2\})$$

Sei $D_1 = \pi_1^{-1}(\{1\}) = \{(1, 1), (1, 2)\}$
 $D_2 = \pi_2^{-1}(\{1\}) = \{(1, 1), (2, 1)\}$
 $\Rightarrow D_1 \cap D_2 = \{(1, 1)\}$ ist keine Zylindermenge.



(v) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ W-Raum (d.h. Messraum mit $\mu(X) = 1$)
 Sei $A \in \mathcal{A}$ (ein Ereignis). Dann ist

$$\{B \in \mathcal{A} \mid \mu(A \cap B) = \mu(A) \cdot \mu(B)\}$$

ein Dynkin system.

Beispiele:

Wurf von fairen zwei Münzen $X = \{(K, K), (K, Z), (Z, K), (Z, Z)\}$

$$\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$$

$$\mu(x) = \frac{1}{4} \quad \forall x \in X$$

$A =$ die erste Münze ist Z $= \{(Z, K), (Z, Z)\}$

$$B = \{(K, K)\}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \mu(A) &= \frac{1}{2} \\ \mu(B) &= \frac{1}{4} \\ \mu(A \cap B) &= 0 \end{aligned} \rightarrow A, B \text{ sind abhängig.}$$

$C =$ die zweite Münze ist Zahl

$$= \{(Z, Z), (K, Z)\}$$

$$\Rightarrow C \cap A = \{(Z, Z)\}$$

$$\Rightarrow \mu(A) \cdot \mu(C) = \frac{1}{4} = \mu(A \cap C)$$

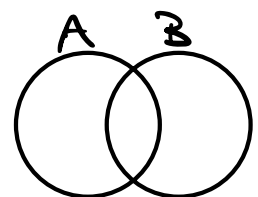
Beweis

$$\bullet \mu(A \cap \emptyset) = \mu(\emptyset) = 0 = 0 \cdot \mu(A) = \mu(A) \cdot \mu(\emptyset)$$

$$\Rightarrow \emptyset \in \mathcal{U}$$

$$\bullet B \in \mathcal{U}$$

$$A = A \setminus B \cup A \cap B$$



$$\mu(A \cap B^c) = \mu(A \setminus B) \stackrel{\substack{\downarrow \\ \text{Additiv. u. Endlichkeit}}}{=} \mu(A) - \mu(A \cap B)$$

$$B \in \mathcal{U} \\ = \mu(A) - \mu(A) \cdot \mu(B)$$

$$= \mu(A) \underbrace{(1 - \mu(B))}_{\mu(X)} = \mu(A) \cdot \mu(B^c) \\ \uparrow \\ X = B \cup X \setminus B$$

$$\Rightarrow B^c \in \mathcal{U}$$

• Seien $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $B_n \in \mathcal{U}$ p.w. disjunkt.

$$\mu(A \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{(A \cap B_n)}_{\text{p.w. disjunkt}}\right)$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A \cap B_n) \stackrel{B_n \in \mathcal{U}}{=} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A) \cdot \mu(B_n) \stackrel{\sigma\text{-Add.}}{=} \mu(A) \cdot \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right)$$

Aufgabe 2: $f: X \rightarrow Y$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(X)$ σ -Algebra

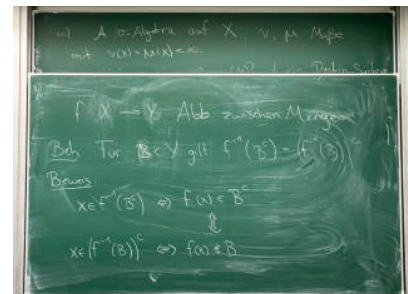
Dann ist $f_* \mathcal{A} = \{M \subset Y \mid f^{-1}(M) \in \mathcal{A}\}$

ist eine σ -Algebra (die größte σ -Algebra $\mathcal{B}$ auf Y
s.d. $f: (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ messbar ist.

Beweis:

- $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{A} \Rightarrow \emptyset \in f_* \mathcal{A}$
- $M \in f_* \mathcal{A} \Rightarrow f^{-1}(M^c) = f^{-1}(M)^c \in \mathcal{A} \Rightarrow M^c \in f_* \mathcal{A}$
- $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}, M_n \in f_* \mathcal{A} \Rightarrow f^{-1}(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} M_n) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{f^{-1}(M_n)}_{f_* \mathcal{A}} \in f_* \mathcal{A}$

Wenn $f: (X, \mathcal{A}) \rightarrow (Y, \mathcal{B})$ messbar
 $\Rightarrow \forall B \in \mathcal{B}: f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \Rightarrow B \in f_* \mathcal{A}$
 $\Rightarrow \mathcal{B} \subseteq f_* \mathcal{A}.$



Bemerkung:

Quotienttopologie: (X, τ) topol. Raum $\sim$ Äquivalenzrelation auf X

$(X/\sim, \tau_\sim)$ mit $\tau_\sim = \{M \subset X/\sim \mid \pi^{-1}(M) \in \tau\}$

top. Raum

$\tau_{\sim}$ größt. Topologie s.d. $\pi: X \rightarrow X/\sim$ stetig ist.

Aufgabe 3

Seien $(X_i, \mathcal{A}_i)$, $i=1, \dots, n$, $(Y, \mathcal{B})$ Messräume

Beh.: Eine Abb.

$$f: (Y, \mathcal{B}) \rightarrow (X_1 \times \dots \times X_n, \underbrace{\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n}_{\sigma(\mathcal{Z}(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n))})$$

ist messbar, g.d.w

$$f_i = \pi_i \circ f$$

messbar $\forall i=1, \dots, n$

$$\leadsto \pi_i(X_1 \times \dots \times X_n, \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n) \rightarrow (X_i, \mathcal{A}_i)$$

messbar $\forall i=1, \dots, n$

Beweis

" $\Rightarrow$ " $f_i = \pi_i \circ f$ messbar als Komposition messbarer Abb.

" $\Leftarrow$ " Seien nun alle f_i messbar

$$\text{z.z. } f^*(\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n) = \{ f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n \} \subseteq \mathcal{B}$$

Wir wissen $\mathcal{B} \supset f_i^*(A_i) = f^*(\pi_i^*(A_i))$
 $\uparrow$
 f_i messbar

$$\Rightarrow \mathcal{B} \supset \sigma\left(\bigcup_{i=1}^n f_i^*(\pi_i^*(A_i))\right) = \sigma\left(f^*\left(\underbrace{\bigcup_{i=1}^n \pi_i^*(A_i)}_{\mathcal{Z}(A_1, \dots, A_n)}\right)\right)$$

$$\stackrel{(*)}{=} f^*(\sigma(\mathcal{Z}(A_1, \dots, A_n)))$$

$$= f^*(A_1 \otimes \dots \otimes A_n)$$

(*) Beh.: Ist $f: Y \rightarrow X$ Abb., $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}(X)$

Dann gilt $\sigma(f^*(\mathcal{E})) = f^*(\sigma(\mathcal{E}))$

Bew.: $f^*(\sigma(\mathcal{E}))$ ist σ -Algebra nach V.

$$" \subseteq ": f^*(\mathcal{E}) \subseteq f^*(\sigma(\mathcal{E}))$$

$$\Rightarrow \sigma(f^*(\mathcal{E})) \subseteq f^*(\sigma(\mathcal{E}))$$

$$" \supseteq ": f_*(\sigma(f^*(\mathcal{E}))) = \{M \subset X \mid f^{-1}(M) \in \sigma(f^*(\mathcal{E}))\}$$

ist σ -Algebra nach A2

die $\mathcal{E}$ enthält ($M \in \mathcal{E} \Rightarrow f^{-1}(M) \in f^*(\mathcal{E}) \subset \sigma(f^*(\mathcal{E}))$)

$$\Rightarrow \sigma(\mathcal{E}) \subseteq f_*(\sigma(f^*(\mathcal{E})))$$

$$\Rightarrow f^*(\sigma(\mathcal{E})) \subseteq f^*(f_*(\sigma(f^*(\mathcal{E})))) \subseteq \sigma(f^*(\mathcal{E}))$$